数理解析研究所講究録 1387 巻 2004 年 125-132

On L^2-invariants of surface bundles

東京農工大・工　森藤孝之 (Takayuki Morifuji)
Tokyo Univ. of Agriculture and Technology

最近 Vaillant [11] および Lück-Schick [7] によって，η-不変量に関するある種の "近似定理" が得られました．これを円周上の曲面束に対して適用することにより，von Neumann ρ-不変量 (η-不変量の差として定義されるもので計量によらない [3]) の明示式を与えることができます．具体的には，曲面の写像類群の Meyer コサイクル [8] を用いて定式化を行います．

また，円周上の曲面束に対する第一森田-Mumford 類を有界コホモロジーの枠組みで捉えるという北野の結果 [6] と上記定式化を組み合わせることにより，von Neumann ρ-不変量，第一森田-Mumford 類および Rochlin 不変量という 3 つの不変量の関係を記述することができます．

1. Introduction

X を向き付けられた 4 次元閉多様体とします．2 次元ホモロジー上の交叉形式

$$H_2(X,\mathbb{Q})\otimes H_2(X,\mathbb{Q})\to\mathbb{Q}$$

の符号数 ($\sharp\{$ 正の固有値 $\}-\sharp\{$ 負の固有値 $\}$) を考えることにより，4 次元多様体 X の符号数と呼ばれる不変量 $\mathrm{Sign}(X)$ が定義されます．古典的な Hirzebruch の符号数定理により，この不変量は積分表示することができます:

$$\mathrm{Sign}(X)=\frac{1}{3}\int_X P_1.$$

ここで，P_1 は第一 Pontrjagin 形式を表します．よく知られた事実として，$\mathrm{Sign}(X)$ は次の性質をみたします:

<u>FACT</u>. 有限 d 重被覆 $\overline{X} \to X$ に対して，$\mathrm{Sign}(\overline{X}) = d \cdot \mathrm{Sign}(X)$.

つまり，符号数は有限被覆の下で乗法的となります．しかしながら，X が閉でない場合には，一般に符号数はこの性質をみたさないことが知られています．この場合，そもそも Hirzebruch の符号数定理が成り立たず，次のように定式化されます:

<u>定理 1</u> (Atiyah-Patodi-Singer). X を 4 次元コンパクトリーマン多様体で，$\partial X = Y$ かつ境界の近くで積計量をもつとする．このとき次が成り立つ：

$$\eta(Y) = \frac{1}{3}\int_X P_1 - \mathrm{Sign}(X).$$

ここで，$\eta(Y)$ は 3 次元リーマン多様体 Y の η-不変量 (符号作用素のスペクトルを用いて定義されるスペクトル不変量) を表す．また，空間対 (X,Y) の符号数 $\mathrm{Sign}(X,Y)$ は (簡単のため $\mathrm{Sign}(X)$ で表す)，合成写像

$$A : H_2(X) \xrightarrow{\cong} H^2(X,Y) \longrightarrow H^2(X) \cong H_2(X)^*$$

を用いて $\mathrm{Sign}(X) = \mathrm{Sign}(A)$ により定義される．

境界付き多様体の符号数と同様，η-不変量も有限被覆の下で乗法的とはなりません．しかしながら最近の L^2-不変量に関する結果から，以下の設定を考えるとある種の乗法性が成り立つことが知られています．

離散群 Γ で $[\Gamma : \Gamma_k] < \infty$，$\cap_k \Gamma_k = \{1\}$ をみたす正規部分群の減少列 $\Gamma \rhd \Gamma_1 \rhd \Gamma_2 \rhd \cdots$ をもつものを考えます．基本群の表現 $\pi_1 X \twoheadrightarrow \Gamma$ に対応した Γ-被覆を $(\overline{X}, \overline{Y}) \to (X,Y)$ とします．

ホモロジー群 $H_2(X)$ を L^2-ホモロジー $H_2^{(2)}(\overline{X})$ に置き換えることにより，自己共役な Γ-同変有界作用素

$$\bar{A} : H_2^{(2)}(\overline{X}) \to H_2^{(2)}(\overline{X})^* \cong H_2^{(2)}(\overline{X})$$

が得られます．像における同型は，ヒルベルト空間とその双対の自然な同型を表

します．前述の A と同様，作用素 $\bar{A}$ に関して $H_2^{(2)}(\overline{X})$ も直交分解

$$H_2^{(2)}(\overline{X}) = (\text{positive}) \oplus (\text{kernel}) \oplus (\text{negative})$$

ができて，Γ-被覆 $\overline{X}$ の L^2-符号数 $\mathrm{Sign}^{(2)}(\overline{X}) \in \mathbb{R}$ を

$$\mathrm{Sign}^{(2)}(\overline{X}) = \dim^{(2)}(\text{positive}) - \dim^{(2)}(\text{negative})$$

により定義します．ここで，$\dim^{(2)} \in \mathbb{R}$ は von Neumann 次元を表します．

さて，$X_k = \overline{X}/\Gamma_k \to X$ を Γ/Γ_k-被覆とします．このとき，Lück-Schick [7] により次の定理が示されています．

定理 2. $\mathrm{Sign}^{(2)}(\overline{X}) = \lim_{k\to\infty} \dfrac{\mathrm{Sign}(X_k)}{[\Gamma : \Gamma_k]}$.

つまり L^2-符号数を考えると，有限被覆の下で乗法的であるという前述の符号数の性質が "近似的に" 成り立つことになります．この結果と，やはり Lück-Schick による L^2-符号数定理

$$\mathrm{Sign}^{(2)}(\overline{X}) = \frac{1}{3}\int_X P_1 - \eta^{(2)}(\overline{Y})$$

($\eta^{(2)}(\overline{Y})$ は von Neumann η-不変量を表す) を組み合わせることによって，上記近似定理が η-不変量についても成り立つことがわかります．

定理 3 (Lück-Schick [7], Vaillant [11]). $\eta^{(2)}(\overline{Y}) = \lim_{k\to\infty} \dfrac{\eta(Y_k)}{[\Gamma : \Gamma_k]}$.

注意. Vaillant [11] は $\partial X = Y$ となる 4 次元多様体 X の存在を仮定せずに，定理が成り立つことを示しています．

この η-不変量に関する近似定理 (定理 3) を用いて，次節で円周上の曲面束の von Neumann ρ-不変量の定式化を行います．また，北野による曲面束の第一特性類の有界コホモロジーにおける解釈 [6] と組みあわせることにより，3 節において von Neumann ρ-不変量，第一森田-Mumford 類および Rochlin 不変量の関係を記述します．

2. A formula of $\rho^{(2)}$

向き付けられた 3 次元閉リーマン多様体 Y に対して，符合作用素のスペクトルを用いて Y の η-不変量 $\eta(Y)$ が定義されます．Cheeger-Gromov [3] によれば，微分 1 型式上の熱核 $e^{-\Delta t}$ を用いて

$$\eta(Y) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} \mathrm{tr}(*de^{-\Delta t}) dt$$

によって定義することもできます．また，Y の Γ-被覆 $\overline{Y}$ へ計量および符号作用素をもち上げることにより，von Neumann η-不変量 $\eta^{(2)}$ が

$$\eta^{(2)}(\overline{Y}) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty t^{-1/2} \mathrm{tr}_\Gamma(*de^{-\overline{\Delta} t}) dt$$

により定義されます．ただし tr_Γ は Γ-トレース，$e^{-\overline{\Delta} t}$ は $\overline{Y}$ 上の熱核を表します．これらはいずれも計量に依存しますが，Cheeger-Gromov [3] により次が示されています．

定理 4. 二つの不変量の差 $\eta^{(2)}(\overline{Y}) - \eta(Y)$ は計量によらずに定まる．

Y とその Γ-被覆 $\overline{Y}$ に対して定まるこの不変量を，Y の von Neumann ρ-不変量とよび，$\rho^{(2)}(\overline{Y})$ で表すことにします．これは，基本群のユニタリ表現 $\gamma : \pi_1 Y \to U(k)$ で捻った η-不変量との差として定義される ρ-不変量 $\rho = \eta_\gamma - k\eta$ のひとつの拡張になっています．

以下，Y として円周 S^1 上の曲面束を考えることにします．Σ_g を向き付けられた種数 g (≥ 1) の閉曲面とし，$\mathcal{M}_g$ でその写像類群 $\pi_0 \mathrm{Diff}_+ \Sigma_g$ を表すことにします．また $\mathcal{M}_g$ の元 φ に対し，M_φ で写像トーラス

$$M_\varphi = \Sigma_g \times \mathbb{R}/(x,t) \sim (\varphi(x), t+1)$$

を表します．射影 $p : \pi_1 M_\varphi \to \pi_1 S^1 \cong \mathbb{Z}$ に関する $\mathbb{Z}$-被覆 $\overline{M}_\varphi$ に対して先の近似定理を適用することにより，次が成り立つことがわかります．

命題 5. $\rho^{(2)}(\overline{M}_\varphi) = -\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{sign}(\varphi,\varphi^i)$.

ここで，sign $\in Z^2(\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}),\mathbb{Z})$ は Meyer の符号数コサイクル [8] を表します．簡単のため，ホモロジー表現 $\mathcal{M}_g \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ による $\mathcal{M}_g$ への引き戻しにも同じ記号を用いることにします．位相的には，sign(a,b) は境界のモノドロミーが $a, b, ab \in \mathcal{M}_g$ で与えられるパンツ上の曲面束の符号数を表しています．

命題 5 の証明は $\mathbb{Z}$ の正規部分群の減少列 $\mathbb{Z} \rhd 2!\mathbb{Z} \rhd 3!\mathbb{Z} \rhd \cdots$ に対して定理 3 を適用し，さらに有限被覆における η-不変量の乗法性からのずれの標準 2 枠 [1] による解釈 [9] を用いることにより示されます．右辺の収束性については，$|\mathrm{sign}| \leq 2g$ であることから容易に従います ([2] 参照)．

例 6. 種数 1 の場合，$A \in \mathcal{M}_1 \cong SL(2,\mathbb{Z})$ は以下の 3 種類に分類されます．

(i) 楕円型 ($|\mathrm{tr}\ A| < 2$)．このとき A は有限位数をもち，

$$\rho^{(2)}(\overline{M}_A) = -\eta(M_A) = \begin{cases} 2/3 & (\mathrm{tr}\ A = -1) \\ 1 & (\mathrm{tr}\ A = 0) \\ 4/3 & (\mathrm{tr}\ A = 1) \end{cases}$$

が成り立ちます [9]．特に，対合 $\varphi \in \mathcal{M}_g$ については種数によらずに常に $\rho^{(2)}(\overline{M}_\varphi) = 0$ となります．

(ii) 放物型 ($|\mathrm{tr}\ A| = 2$)．$A_b = \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ($b \in \mathbb{Z}$) とすると，

$$\rho^{(2)}(\overline{M}_{A_b}) = -\mathrm{sgn}(b).$$

(iii) 双曲型 ($|\mathrm{tr}\ A| > 2$)．双曲型の元 A に対しては，種数 1 の Meyer 関数 $\phi : SL(2,\mathbb{Z}) \to (1/3)\mathbb{Z}$ が $\phi(A^k) = k\phi(A)$ をみたすことから，

$$\begin{aligned}\rho^{(2)}(\overline{M}_A) &= -\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k-1}\mathrm{sign}(A,A^i) \\ &= -\lim_{k\to\infty}\left\{\phi(A) - \frac{1}{k}\phi(A^k)\right\} = 0.\end{aligned}$$

より一般に，種数が2以上の場合には次が成り立ちます．

系 7. トレリー群 $\mathcal{I}_g = \mathrm{Ker}\{\mathcal{M}_g \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})\}$ の元 φ に対して，$\rho^{(2)}(\overline{M}_\varphi) = 0$.

Meyer コサイクルが $\mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z})$ 上で定義されていることから直ちに従います．

3. Morita-Mumford class and Rochlin invariant

第一森田-Mumford 類 e_1 とは，中心拡大

$$0 \to \mathbb{Z} \to \mathcal{M}_{g,1} \to \mathcal{M}_{g,*} \to 1$$

の Euler 類の2乗をファイバー積分することにより定義される $\mathcal{M}_g$ の2次元コホモロジー類のことです [10]．ここで，$\mathcal{M}_{g,1}$ および $\mathcal{M}_{g,*}$ は境界または1点付き曲面の写像類群を表します．このとき，中心 $\mathbb{Z}$ は境界に平行なデーンツイストによって生成されることになります．

さて，以下ではこの $e_1 \in H^2(\mathcal{M}_g,\mathbb{Z})$ を円周上の曲面束に対して考えることにします．つまり，ホロノミー準同型 $f : \pi_1 S^1 \to \mathcal{M}_g$ に対して，引き戻し f^*e_1 を考えます．このとき $H^2(S^1,\mathbb{Z}) = 0$ より，これは自明になってしまいます．しかしながら次の Fact により，有界コホモロジー H_b^*([5] 参照) の枠組で考えると f^*e_1 が非自明になる可能性があります．

Fact ([4], [6]).

(i) $H_b^2(\mathbb{Z},\mathbb{Z}) \cong H^1(\mathbb{Z},\mathbb{R}/\mathbb{Z}) \cong \mathbb{R}/\mathbb{Z}$.

(ii) $e_1 = -3[\mathrm{sign}]$. 特に，e_1 は有界コホモロジー類．

実際，北野 [6] により $f^*e_1/48$ は $H_b^2(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ の元として意味を持ち，しかもそれが3次元スピン多様体の Rochlin 不変量 μ で与えられることが示されています．ここで Rochlin 不変量とは，次のように定義される $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$-値の不変量のことです．

3 次元スピン多様体 (Y,α) に対して，$\partial X = Y$ かつ $\beta|_Y = \alpha$ をみたす 4 次元スピン多様体 (X,β) が存在します．そこで (Y,α) の Rochlin 不変量を

$$\mu(Y,\alpha) = \frac{\mathrm{Sign}(X)}{16} \mod \mathbb{Z} \in \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$$

により定義します．

注意. Rochlin の定理から，$\mu(Y,\alpha)$ は 4 次元多様体 (X,β) によらずに定まることがわかります．

命題 8 (Kitano). $f:\pi_1 S^1 \to \mathcal{M}_g$ をホロノミー準同型，$\varphi = f(1)$ とする．このとき $f^* e_1/48 \in H_b^2(\mathbb{Z},\mathbb{Z})$ はトレリー群 $\mathcal{I}_g$ 上 Rochlin 不変量 $\mu(M_\varphi,\alpha) \in H^1(\mathbb{Z},\mathbb{R}/\mathbb{Z})$ で与えられる．

ただし，α は曲面 Σ_g のスピン構造から誘導される M_φ 上のスピン構造を表しています．本稿の主結果は，北野によるトレリー群上での第一森田-Mumford 類の記述をレベル 2 部分群

$$\mathcal{M}_g(2) = \mathrm{Ker}\{\mathcal{M}_g \to \mathrm{Sp}(2g,\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})\}$$

に拡張し，von Neumann ρ-不変量との関係を見出した次の定理です．

定理 9. $\mathcal{M}_g(2)$ 上 $f^* e_1/48$ は $\mu(M_\varphi,\alpha) - \dfrac{1}{16}\rho^{(2)}(\overline{M}_\varphi)$ で与えられる．

証明は，北野によるスピン構造を用いた $\mathcal{M}_g(2)$ の中心拡大の幾何的構成および命題 5 から直ちに得られます．$e_1/48$ と μ はスピン構造によりますが，定理 9 からその差はスピン構造によらず，von Neumann ρ-不変量で与えられることがわかります．また，トレリー群 $\mathcal{I}_g$ 上 $\rho^{(2)}$ が消えるという事実 (系 7) から，北野の結果 (命題 8) が復元されることになります．

注意. 技術的な理由 (曲面上のスピン構造から M_φ のスピン構造を唯一に定めるため) から，命題 8 と定理 9 は正しくは $\mathcal{I}_{g,*}$ と $\mathcal{M}_{g,*}(2)$ 上でそれぞれ定式化する必要があります．

References

[1] M. Atiyah, *On framings of* 3*-manifolds*, Topology **29** (1990), 1–7.

[2] J. Barge and E. Ghys, *Cocycles d'Euler et de Maslov*, Math. Ann. **294** (1992), 235–265.

[3] J. Cheeger and M. Gromov, *Bounds on the von Neumann dimension of L^2-cohomology and the Gauss-Bonnet theorem for open manifolds*, J. Differential Geom. **21** (1985), 1–34.

[4] E. Ghys, *Groupes d'homéomorphismes du cercle et cohomologie bornée*, Contemp. Math. **58** (1987), 81–105.

[5] M. Gromov, *Volume and bounded cohomology*, Inst. Hautes Etudes Sci. Publ. Math. **56** (1982), 5–99.

[6] T. Kitano, *On the first Morita-Mumford class of surface bundles over S^1 and the Rochlin invariant*, J. Knot Theory Ramifications **9** (2000), 179–186.

[7] W. Lück and T. Schick, *Approximating L^2-signatures by their finite-dimensional analogues*, math.GT/0110328.

[8] W. Meyer, *Die Signatur von Flächenbündeln*, Math. Ann. **201** (1973), 239–264.

[9] T. Morifuji, *The η-invariant of mapping tori with finite monodromies*, Topology Appl. **75** (1997), 41–49.

[10] S. Morita, *Structure of the mapping class groups of surfaces: a survey and a prospect*, Proc. of the Kirbyfest (Berkeley, CA, 1998), 349–406 (electronic), Geom. Topol. Monogr., 2, Geom. Topol. Publ., Coventry, 1999.

[11] B. Vaillant, *Indextheorie für Überlagerungen*, Diplomarbeit, Universität Bonn, (1997).

(2004年2月19日記)

もりふじ　たかゆき
〒184-8588 東京都小金井市中町 2-24-16
東京農工大学数学教室
morifuji@cc.tuat.ac.jp